

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý 1

Phương pháp quy nạp toán học là phương pháp dùng để chứng minh một mệnh đề toán học liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ đúng với mọi n .

Các bước chứng minh:

Bước 1:

Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước 2:

Giả thiết mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ bất kỳ và chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$

II. BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có các đẳng thức và bất đẳng thức sau:

a. $2 + 5 + 8 + \dots + 3n - 1 = \frac{n(3n+1)}{2}$

b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2}$

c. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

e. $1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

f. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

Bài 2. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a. $(n^3 + 3n^2 + 5n) : 3$

b. $(4^n + 15n - 1) : 9$

c. $(n^3 + 11n) : 6$

Bài 2. Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

a. Tính S_1, S_2, S_3

b. Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng quy nạp

DÃY SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Một số khái niệm về dãy số

Dãy số thường được viết dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

Trong đó:

- $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n)
- u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số
- Dãy số có thể hữu hạn hoặc vô hạn

2. Cách cho một dãy số

Có 3 cách cho một dãy số:

- Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát
- Dãy số cho bằng phương pháp mô tả
- Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn

- (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- (u_n) được gọi là bị chặn nếu (u_n) vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

II. BÀI TẬP

Bài 1. Viết 5 số hạng đầu tiên của các dãy số có số hạng tổng quát cho sau:

a. $u_n = \frac{1}{2^n}$ b. $u_n = \frac{3n-2}{2n+3}$ c. $u_n = (-1)^n \cdot 2n$ d. $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$

Bài 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$

a. Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy

b. Số $\frac{9}{41}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

Bài 3. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

a. Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy

b. Tìm số hạng tổng quát của dãy

Bài 4. Xét tính tăng, giảm của các dãy số có số hạng tổng quát cho sau:

$$\mathbf{a.} u_n = 2n - 1 \qquad \mathbf{b.} u_n = \frac{2n}{2n - 1} \qquad \mathbf{c.} u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1} \qquad \mathbf{d.} u_n = \frac{(-1)^n}{n + 2}$$

Bài 5. Xét tính bị chặn của các dãy số có số hạng tổng quát cho sau:

$$\mathbf{a.} u_n = \frac{2n - 3}{n + 1} \qquad \mathbf{b.} u_n = \frac{1}{n(n + 1)} \qquad \mathbf{c.} u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad \mathbf{d.} u_n = \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 1}$$
